

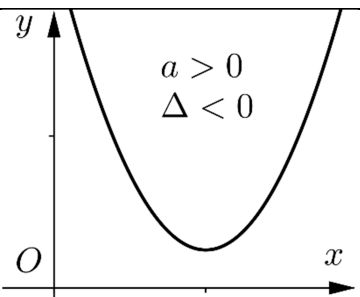
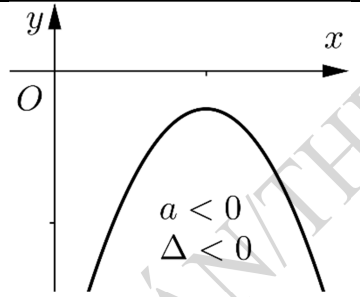
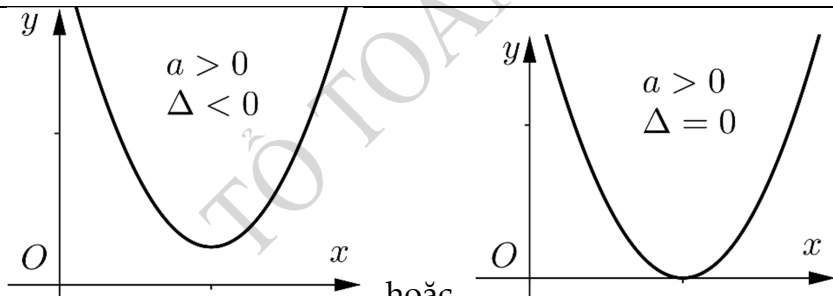
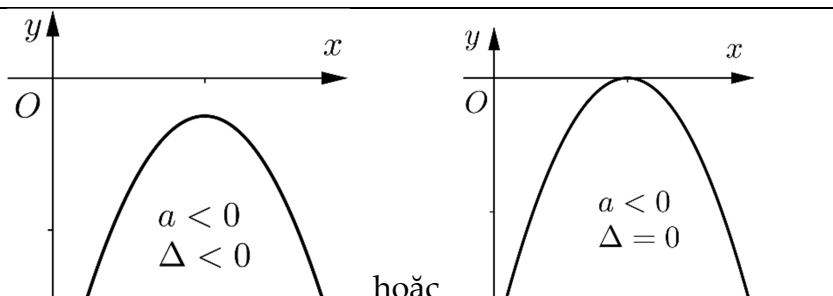
Chủ đề**TAM THỨC BẬC HAI KHÔNG ĐỔI DẤU TRÊN $\mathbb{R}$**

Qua bài học, học sinh cần nắm được:

- Các điều kiện để một tam thức bậc hai không đổi dấu trên $\mathbb{R}$.
- Cách vận dụng để giải quyết các bài toán có tham số.

A. ĐIỀU KIỆN ĐỂ TAM THỨC BẬC HAI KHÔNG ĐỔI DẤU TRÊN $\mathbb{R}$:

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Đồ thị	Điều kiện
	$f(x) > 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
	$f(x) < 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
 hoặc	$f(x) \geq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
 hoặc	$f(x) \leq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Lưu ý 1: trong các điều kiện trên, ta có thể thay Δ bằng $\Delta' = b'^2 - ac$ để thuận lợi hơn trong tính toán.

Ví dụ 1: Định m để biểu thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m+1$ luôn dương với mọi $x \in \mathbb{R}$

Giải

$$\text{Áp dụng điều kiện: } f(x) > 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \text{ (luôn đúng)} \\ \Delta = (m+2)^2 - 4(8m+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 28m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 28.$$

Vậy với $m \in (0, 28)$ thì thỏa ycbt.

Ví dụ 2: Định m để bất phương trình $-4x^2 - 2(m-1)x + m \leq 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$

Giải

Bất phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$, tức là biểu thức $f(x) = -4x^2 - 2(m-1)x + m \leq 0; \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 < 0 \text{ (luôn đúng)} \\ \Delta' = (m-1)^2 + 4m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = -1 \text{ (do } (m+1)^2 \geq 0; \forall m \in \mathbb{R})$$

Vậy với $m = -1$ thì thỏa ycbt.

Lưu ý 2: các điều kiện trên chỉ có thể áp dụng nếu biểu thức đề bài cho là tam thức bậc hai (tức là $a \neq 0$). Do đó với các bài toán mà hệ số a phụ thuộc tham số m thì ta phải xét cả 2 trường hợp $a = 0$ và $a \neq 0$ có thỏa ycbt hay không.

Ví dụ 3: Định m để biểu thức $f(x) = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m-3$ luôn âm với mọi $x \in \mathbb{R}$

Giải

TH1: Xét $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$

Khi đó $f(x) = 4x - 6 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$ (không thỏa ycbt)

(bài toán yêu cầu $f(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nhưng trong TH1 $f(x) < 0$ chỉ đúng với mọi $x < \frac{3}{2}$ nên loại trường hợp này)

TH2: Xét $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

Khi đó ycbt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m+1 < 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - (m+1)(3m-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ \underbrace{(m-1)}_{<0 \text{ do } m < -1} \cdot (-2m-4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ -2m-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m < -2 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$$

Vậy với $m \in (-\infty; -2)$ thì thỏa ycbt.

Ví dụ 4: Định m để hàm số $f(x) = \sqrt{(3m+1)x^2 - (3m+1)x + m+4}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

Giải

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow (3m+1)x^2 - (3m+1)x + m+4 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

TH1: Xét $3m+1=0 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{3}$

Khi đó bpt $\Leftrightarrow \frac{11}{3} \geq 0$ (luôn đúng) hay hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ (thỏa ycbt).

TH2: $3m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{1}{3}$

Khi đó ycbt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3m+1 > 0 \\ \Delta = (3m+1)^2 - 4(3m+1)(m+4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{3} \\ \underbrace{(3m+1)}_{>0}(-m-15) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{3} \\ -m-15 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{3} \\ m \geq -15 \end{cases} \Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}$$

Vậy với $m \in \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$ thì thỏa ycbt.

Chú ý: Dấu bằng xuất hiện trong kết quả cuối cùng do kết hợp $m > -\frac{1}{3}$ (TH2) với $m = -\frac{1}{3}$ (TH1). HS nếu không chú ý sẽ dễ bị thiếu và dẫn đến kết luận sai.

B. BÀI TẬP VỀ NHÀ: Học sinh làm vào vở bài tập Đại số những câu sau đây

Bài 15 – trang 8 – đề cương MK: câu a, c, e

Tìm m sao cho

a) $x^2 + 2mx + m + 2 > 0; \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c) $mx^2 - 10x - 5 \leq 0; \quad \forall x \in \mathbb{R}$

e) $1 \leq \frac{3x^2 - mx + 5}{2x^2 - x + 1} < 6; \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Bài 16 – trang 9 – đề cương MK: câu a, b

Định m để các hàm số sau có tập xác định là $\mathbb{R}$

a) $y = \sqrt{m(m+2)x^2 + 2mx + 2}$

b) $y = \frac{1}{\sqrt{(1-m)x^2 - 2mx + 5 - 9m}}$

Học sinh trao đổi thêm với GV Toán của lớp để được hướng dẫn cụ thể !